第 53 卷 第 3 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 53 No. 3
2014 年 5 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　May 2014

隐 Makrov 机制转移与随机时间水平下的多期资产配置*

张 玲[1]，曾 燕[2]
（1. 广东金融学院经济贸易系，广东 广州 510521；
2. 中山大学岭南学院，广东 广州 510275）

摘 要：在状态部分可观测的金融市场中，研究了投资活动终止时间不确定的多阶段均值－方差投资组合选择问题。假定市场存在有限个不可观测状态，利用离散时间时变隐 Markov 链描述不可观测状态的变化过程；无风险资产在各个阶段的收益率依赖于可观测市场状态；风险资产在各阶段的收益率同时依赖于可观测和不可观测市场状态。通过构造充分统计量，部分信息下的投资组合选择问题等价地转化为了完全信息下的优化问题。再利用动态规划方法和拉格朗日对偶原理，得到了最优资产组合策略和有效边界的解析表达式。

关键词：部分可观测信息；不确定退出时间；隐 Markov 机制转移；拉格朗日方法

中图分类号：F830；O224　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2014）03－0043－09

Multi-period Portfolio Selection with Hidden Markov Regime Switching and Stochastic Investment Horizon

ZHANG Ling[1]，*ZENG Yan*[2]
（1. Department of Economic and Trade, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521, China;
2. Lingnan College (University), Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China）

Abstract: A multi-period mean-variance portfolio selection problem with stochastic investment horizon in the financial market where the market states are partially observable is considered. Suppose that the dynamics of the unobservable market states is described by a finite-state discrete-time hidden Markov chain. Return of the risk-free asset is assumed to depend on the observable market state at that period. And return of the risky asset is assumed to be dependent both on the observable and unobservable market states at that period. The portfolio selection optimization problem with partially observable information is transformed into the optimization problem with fully observable information by using the method of sufficient statistics. And explicit expressions of optimal portfolio strategy and efficient frontier are derived by adopting dynamic programming approach and Lagrange dual theory.

Key words: partially observable information; uncertain exit time; hidden Markov regime switching; Lagrange approach

自 Markowitz[1] 开创性地提出均值－方差模型以来，应用定量分析方法研究金融问题已成为了现代金融经济学的研究热点。囿于 Markowitz 均值－方差模型的单阶段静态特点，为更符合金融市场实际，后来很多学者致力于动态投资组合选择问题的研究。Merton[2] 假定股票收益服从几何布朗运动，

* **收稿日期：**2014－03－01
基金项目：国家自然科学基金重点资助项目（71231008）；国家自然科学基金青年资助项目（71201173）；教育部人文社会科学基金资助项目（12YJCZH267，13YJCZH247）；广东省哲学社会科学基金资助项目（GD12XYJ06）；广东省自然科学基金资助项目（201301011959）；广东金融学院资助项目（12XJ02－10）
作者简介：张玲（1979 年生），女；**研究方向：**数理金融；**通讯作者：**曾燕；E-mail：zengy36@mail.sysu.edu.cn.

研究了 CRRA 效用下的连续时间动态投资组合选择问题。Li 等[3]，Zhou 等[4]分别将 Markowitz 的静态均值－方差模型拓展到了多阶段和连续时间情形。随后，Lim 等[5]，Zhu 等[6]和 Leippold 等[7]分别就具有随机参数、破产风险控制和负债等现实约束时的动态均值－方差投资组合选择问题进行了研究。Basak 等 [8]，Björk 等[9]进一步研究了均值－方差投资组合选择问题的时间一致性策略。

现实金融市场中，各种市场信息和状态都会对资产收益产生显著影响。考虑存在市场状态风险下的投资组合选择问题成为了近年研究的热点之一，其中 Markov 机制转移模型常用来刻画金融市场状态的演化过程。Markov 机制转移模型最先由 Hamilton[10]提出，其典型的特点是用离散或连续时间有限状态 Markov 链刻画金融市场状态的演化过程。过去十多年中，各类研究表明 Markov 链不仅能非常好地拟合金融时间序列数据，还能很好地描述金融市场的动态变化。因此，Markov 机制转移模型也被大量应用到了投资组合选择问题的研究中。在市场状态完全可观测的金融市场中，Zhou 等[11]最先研究了 Markov 机制转移下的连续时间均值－方差最优投资组合选择问题。Çakmak 等[12]提出了 Markov 机制转移市场中的多阶段均值－方差模型，并利用动态规划方法以及文［3］提出的嵌入法，求得了最优策略和有效边界。Costa 等[13]将文［12］的模型推广到了更一般的情况。Wu 等[14]考虑了随机收入和机制转移对最优策略的影响。

上述文献中，Markov 链的状态均假定为完全可观测的，且状态转移矩阵是定常的。事实上，金融市场也存在一些不能直接观测的状态，但其释放出一些信息融合在可观测的状态中。也就是说，投资者在进入市场的时候并不能观测到所有的市场状态，但随着时间推移，投资者观测到的信息不断累积，投资者可依据其决策时刻掌握的所有信息做出最优的决策。隐 Markov 机制转移模型通常用来刻画这种不可观测市场状态的变化过程。Honda[15]研究了隐 Markov 机制转移市场下的最优投资消费问题，并发现长期投资者和短期投资者的投资策略存在显著差异。在隐 Markov 机制转移市场中，Bäuerle 等[16]采用随机滤波和动态规划方法得到了对数效用和幂效用下最优投资策略的解析解。Haussmann 等[17]研究了投资者只能观测到风险资产价格的终端财富效用最大化问题。Bensoussan 等[18]考虑了通货膨胀对于最优投资消费策略的影响。Elliott 等[19]利用随机滤波方法和随机最大值原理，得到了隐 Markov 机制转移市场中的最优均值－方差投资组合策略。Çanakoĝlu 等[20]研究了 HARA 效用下的多阶段投资组合选择问题。Bae 等[21]利用情景生成法构建了均值－方差随机资产配置模型。

稍微遗憾的是，上述 Markov 机制转移市场下最优投资组合选择问题的研究中，投资者结束投资活动退出市场的时间均假设为固定的。但现实中，投资活动会受到许多随机因素的影响。如果市场环境的变化导致投资信心不足，投资者可能会在中途结束投资活动退出市场。不确定退出时间下的最优资产组合问题最早可以追溯到 Yaari[22]，其首先研究了死亡时间不确定时整个生命周期内的投资消费问题。近年来，有关不确定退出时间问题的研究越来越多。Karatzas 等[23]解决了退出时间为资产价格滤子停时下的动态投资问题。Liu 等[24]研究了退出时间服从指数分布时的投资组合选择问题。郭文旌等[25]构建了不确定退出时间下的动态均值－方差模型。Blanchet-Scalliet 等[26]研究了退出时间独立于市场状态和资产价格的连续时间投资组合选择问题。Yi 等[27]考虑了不确定退出时间对最优资产负债管理策略的影响。在资产收益序列相关的金融市场中，Zhang 等[28]得到了退出时间不确定时最优资产组合策略的解析表达式。Zeng 等[29]考虑了效用函数依赖于市场状态时不确定退出时间对最优投资－消费策略的影响。Wu[30]假定退出时间是依赖于市场状态，且市场状态完全可观测。Wu 等[31]和 Yao 等[32]综合考虑了 Markov 机制转移市场中不确定退出时间和内生负债对于动态资产组合策略的影响，但其仅考虑了市场状态完全可观测的情况。上面所提及的研究中，并没有同时考虑市场状态部分可观测且不确定的退出时间依赖于市场状态的情况。

综上，我们发现在信息部分可观测的金融市场中分析依赖于市场状态的不确定退出时间对最优投资策略的影响具有重要的现实意义，也可拓展已有的研究成果。为此，本文拟在状态部分可观测的金融市场中，探讨不确定退出时间下的多期均值－方差投资组合选择问题。不同于已有研究的是：① 本文假定同时存在可观测和不可观测的市场状态，并利用隐 Markov 链刻画不可观测市场状态的变化过程；② 无风险资产的收益依赖于可观测的市场状态，风险资产的收益同时依赖于可观测和不可观测市场状态；③ 状态转移矩阵随着时间变化而变化。

1 模　型

假定金融市场中存在一个风险资产和一个无风险资产，投资者在时刻 0 以初始财富 x 进入市场，计划进行为期 T 个阶段的投资活动，则计划投资结束时间为 T，其中第 k 个阶段指时间区间 $[k-1, k)$，$k = 1,2,\cdots,T$。假设金融市场中存在投资者可观测的市场状态，也存在不可观测的市场状态。在每个阶段初，投资者依据观测到的市场状态信息做出投资决策。

1.1 市场状态

设不可观测的随机市场环境有 N 个自然状态，状态集合为 $\Pi = \{1,2,\cdots,N\}$。令 U_k 表示时刻 k 不可观测的市场状态，则 $U = \{U_k, k = 0,\cdots,T\}$ 是不可观测市场状态过程。假定 U 是一个 Markov 过程，状态转移矩阵为 $Q_k = (Q_k(i,j))_{N\times N}(k = 0,1,\cdots,T-1)$，其中 $Q_k(i,j) = \Pr\{U_{k+1} = j \mid U_k = i\}$ 表示从时刻 k 状态 $U_k = i$ 转变为时刻 $k+1$ 状态 $U_{k+1} = j$ 的时变转移概率，满足 $\sum_{j=1}^{N} Q_k(i,j) = 1$，这里 Pr 是概率测度。需特别说明的是，由于 U_k 不可观测，因此 U 是隐 Markov 链。

设随机市场环境中有 M 个可观测的自然状态，状态集合记为 $\hat{\Pi} = \{1,2,\cdots,M\}$。令 O_k 表示时刻 k 可观测的市场状态，则 $O = \{O_k, k = 0,\cdots,T\}$ 是可观测市场状态过程。在随机市场中，虽然 U 不可观测，但 U 释放出一些信息包含在 O 中。所以，可观测状态过程 O 是不可观测市场状态过程 U 在某种程度上的反映，然而 O 不一定是 Markov 过程。

假设随机市场环境的变化依赖于不可观测状态，但投资者只能观测到 O 的信息，并依据观测信息 O 做出相应的投资决策。令 $G_k = (g_k(i,s))_{N\times M}$，其中 $g_k(i,s) = \Pr\{O_k = s \mid U_k = i\}$。记 $\overline{O}_k = (O_0, O_1, \cdots, O_k)$ 为到时刻 k 为止出现过的所有可观测市场状态，$\overline{U}_k = (U_0, U_1, \cdots, U_k)$ 为到时刻 k 为止出现过的所有不可观测市场状态，则 $\overline{U}_{k+1} = (\overline{U}_k, U_{k+1})$，$\overline{O}_{k+1} = (\overline{O}_k, O_{k+1})$。

1.2 金融市场与财富过程

每个阶段初，无风险资产的收益率通常可以直接从市场中观测到，也就是说其收益率是确定的。但市场状态不同时，无风险资产的收益率是不同的。因此，我们假定在时刻 k，无风险资产的收益率依赖于此时可观测状态 O_k，而与不可观测状态 U_k 无关。第 $k+1$ 阶段初可观测状态为 $O_k = s$ 时，记无风险资产的收益率为 $R_k^0(O_k) = R_k^0(s)$。不可观测市场状态 U_k 显著影响风险资产价格，因此在第 $k+1$ 阶段初可观测状态为 $O_k = s$ 不可观测状态为 $U_k = i$ 时，风险资产的收益率记为 $R_k(O_k, U_k) = R_k(s,i)$，相应的超额收益为 $E[R_k^e(O_k, U_k)] = E[R_k^e(s,i)] = E[R_k(s,i)] - R_k^0(s)$。假定 $R_k^e(O_k, U_k)$ 与 $R_{k+1}^e(O_{k+1}, U_{k+1})$ 独立，且风险资产是非退化的，即对任意的 $k = 0,1,2,\cdots,T-1$，$i \in \Pi$ 和 $s \in \hat{\Pi}$，都有 $\mathrm{Var}[R_k^e(s,i)] > 0$。

令 π_k 表示时刻 k 投资在风险资产上的资金额，则 $\pi = \{\pi_k, k = 0,1,\cdots,T-1\}$ 是相应的多期投资策略。在投资者采用自融资策略 π 时财富过程 $X^\pi = \{X_k^\pi, k = 0,1,\cdots,T-1\}$ 满足

$$X_{k+1}^\pi = R_k^0(O_k)X_k^\pi + R_k^e(O_k, U_k)\pi_k \tag{1}$$

其中 X_k^π 表示投资者采用策略 π 时在时刻 k 拥有的财富。假定整个投资过程中风险资产允许卖空，不存在交易费用，无风险资产允许借贷。

尽管投资者在计划进行 T 阶段的投资活动，但在投资过程中，投资者会依据其观测到的信息不断调整其投资策略，甚至在市场环境不乐观时提前结束投资退出市场。换句话说，对于理性投资者而言，其退出市场的时间是不确定的，且依赖于其观测到的市场状态。用 τ 表示投资者结束投资退出市场的时刻，那么投资者实际退出市场的时刻为 $\min\{\tau, T\} = T \wedge \tau$。设 τ 是取值为 $0,1,\cdots,T$ 的离散随机变量，对任意 $k = 0,1,\cdots,T$ 和 $s \in \hat{\Pi}$，假定在时刻 k 可观测市场状态 $O_k = s$ 时 τ 的条件概率分布为 $\Pr\{\tau = k \mid O_k = s\} = p_k(s)$，且满足 $\sum_{k=1}^{T} \Pr\{\tau = k \mid O_0 = s\} = 1$。那么 $T \wedge \tau$ 的概率分布为

$$\Pr\{T \wedge \tau = k \mid O_k = s\} = \Pr\{\tau = k \mid O_k = s\} = p_k(s), k = 1,\cdots,T$$

这里，假定 $p_0(s) = 0$。

在期望投资收益目标 d 下，投资者在时刻 0 以初始财富 x 进入市场。此时市场上所有可观测和不可观测状态为 (O_0, U_0)，但投资者只能得到 O_0 的信息。投资者希望根据此时掌握的信息 O_0 寻找到最优的投资策略，使得投资结束时投资风险最小，即求解以下均值－方差优化问题

$$P(mv)\begin{cases} \min\limits_{\pi} E[(X_{T\wedge\tau}^\pi - d)^2 \mid X_0^\pi = x, O_0 = s], \\ \text{s.t. } E[X_{T\wedge\tau}^\pi \mid X_0^\pi = x, O_0 = s] = d, \\ X_{k+1}^\pi = R_k^0(O_k)X_k^\pi + R_k^e(O_k, U_k)\pi_k, \\ \quad k = 0,1,\cdots,T-1 \end{cases}$$

注意到，在优化问题 $P(mv)$ 中，财富过程中

$R_k^e(O_k,U_k)$ 依赖于不可观测市场状态 U_k，所以投资者面临的是信息部分可观测下的最优投资决策问题。事实上，在决策过程中，投资者仅能依据观测到的信息 $\overline{O}$ 做出最优投资决策。Bertsekas[33] 发现，通过定义一个包含 U 和 O 所有信息的新状态，信息部分可观测的优化问题 $P(mv)$ 可等价地转化为信息完全可观测的优化问题。下节采用充分统计量方法，构造完全包含 U 和 O 信息的新的状态过程。

2 充分统计量

每个阶段开始时，投资者依据其掌握的所有信息对资产收益分布进行估计。令 $\Phi(k,i) = \Pr\{U_k = i \mid \overline{O}_k\}$ 表示时刻 k 给定所有观测信息 $\overline{O}_k$ 时不可观测状态 $U_k = i$ 的条件概率，则 $\Phi(k) = \{\Phi(k,1),\Phi(k,2),\cdots,\Phi(k,N)\}$ 是相应的条件概率分布。从而对任意 $i \in \Pi$，有 $\Phi(k,i) \geqslant 0$ 且 $\sum_{i=1}^{N}\Phi(k,i) = 1$。在时刻 $k+1$，不可观测状态和可观测状态都得以更新，$\overline{U}_{k+1} = (\overline{U}_k,U_{k+1})$ 且 $\overline{O}_{k+1} = (\overline{O}_k,O_{k+1})$。根据贝叶斯公式，在时刻 $k+1$，所有观测信息为 $\overline{O}_{k+1} = (\overline{O}_k,O_{k+1})$ 时，市场真实状态 U_{k+1} 的条件概率分布为

$$\begin{aligned}\Phi(k+1,j) &= \Pr\{U_{k+1} = j \mid \overline{O}_{k+1}\} = \\ &\Pr\{U_{k+1} = j \mid \overline{O}_k,O_{k+1}\} = \\ &\frac{\sum_{i=1}^{N}\Phi(k,i)Q_k(i,j)g_{k+1}(j,O_{k+1})}{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\Phi(k,i)Q_k(i,j)g_{k+1}(j,O_{k+1})} = \\ &\eta_k^j(\Phi(k),O_{k+1})\end{aligned} \tag{2}$$

由式（2）可看出，$\Phi(k+1)$ 仅依赖于上一阶段不可观测状态分布 $\Phi(k)$ 以及时刻 $k+1$ 的观测信息 O_{k+1}，即 $\Phi(k+1)$ 综合了到时刻 $k+1$ 为止出现过的所有市场状态信息。在时刻 $k+1$，随着所有可观测信息由 $\overline{O}_k$ 更新为 $\overline{O}_{k+1}$，不可观测状态的分布由 $\Phi(k)$ 转变为 $\Phi(k+1)$。在任意时刻 $k+1$，投资者观测到 O_{k+1} 后，便可根据式（2）推断不可观测状态 U_{k+1} 的条件概率分布 $\Phi(k+1)$，并进而判断风险资产的期望收益。也就是说，在任意时刻 k，投资者掌握的所有市场状态信息为 $(O_k,\Phi(k))$。然而，根据式（2）不难发现，在时刻 k，可观测状态 O_k 不同时，不可观测状态的条件分布 $\Phi(k)$ 不同；仅采用 $\Phi(k)$ 这个符号并不能充分体现可观测状态 O_k 对于不可观测状态 U_k 条件概率分布的影响。因此，下文中我们将采用符号 $\Phi^s(k,i)$ 表示时刻 k 可观测状态为 $O_k = s$ 时不可观测状态 $U_k = i$ 的条件概率，即 $\Phi^s(k,i) = \Pr\{U_k = i \mid \overline{O}_{k-1},O_k = s\}$，则 $\Phi^s(k) = \{\Phi^s(k,1),\Phi^s(k,2),\cdots,\Phi^s(k,N)\}$ 是相应的条件概率分布，其中 $\Phi^s(0)$ 可由

$$\Phi^s(0,i) = \frac{\Pr\{U_0 = i\}g_1(i,s)}{\sum_{i=1}^{N}\Pr\{U_0 = i\}g_1(i,s)} \tag{3}$$

确定。现实投资实践中，投资者通常利用时刻 0 掌握的市场信息分析推断得到 $\Phi^s(0)$。

由于 U 是 Markov 链，U_{k+1} 依赖于 U_k，而时刻 $k+1$ 可观测状态 O_{k+1} 仅是此时不可观测状态 U_{k+1} 的反映，所以 $\overline{O}_k$ 与 O_{k+1} 的关系可定义为

$$\begin{aligned}\Pr\{O_{k+1} = s \mid \overline{O}_k\} &= \sum_{l=1}^{N}\Pr\{U_{k+1} = l \mid \overline{O}_k\} \\ &\Pr\{O_{k+1} = s \mid U_{k+1} = l\} = \\ &\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Pr\{U_k = i \mid \overline{O}_k\}\cdot \\ &\Pr\{U_{k+1} = l \mid U_k = i\}\Pr\{O_{k+1} = s \mid U_{k+1} = l\} = \\ &\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Phi(k,i)Q_k(i,l)g_{k+1}(l,s) = \sum_{i=1}^{N}\Phi(k,i)\theta_k(i,s)\end{aligned}$$

其中 $\theta_k(i,s) = \sum_{l=1}^{N}Q_k(i,l)g_{k+1}(l,s)$，且 $\sum_{s=1}^{M}\theta_k(i,s) = 1$。

根据式（2），$\Phi(k)$ 是按照时间递推产生的。Monahan[34] 指出 $\Phi = \{\Phi(k),k \geqslant 0\}$ 是一个 Markov 过程，因此 $\Phi(k)$ 综合了到时刻 k 为止的所有信息。令 $\mathfrak{I}_k = \sigma\{(X_l^\pi,O_l,\Phi(l)),0 \leqslant l \leqslant k\}$ 表示一个 σ -域，则 $\mathfrak{I}_k$ 代表到时刻 k 为止的信息集合。如果 π_k 是 $\mathfrak{I}_k$ 可测的，那么策略 $\pi = \{\pi_k,k = 0,1,\cdots,T-1\}$ 称为可行的投资策略，用 Ξ 表示所有可行策略集合。时刻 k，观测到市场状态 O_k 后，投资者将依据其对不可观测状态 U_k 分布的判断 $\Phi(k)$ 来预测风险资产的超额收益 $E(R_k^e(O_k,U_k))$，找到允许策略 $\pi \in \Xi$，使得投资结束时风险最小。因此，信息部分可观测下的优化问题 $P(mv)$ 等价地转化为以下信息完全可观测的优化问题

$$\widehat{P}(mv)\left\{\begin{array}{c}\min\limits_{\pi\in\Xi}E_{0,x,s}[(X_{T\wedge\tau}^\pi - d)^2], \\ \text{s. t. } E_{0,x,s}[X_{T\wedge\tau}^\pi] = d, \\ X_{k+1}^\pi = R_k^0(O_k)X_k^\pi + R_k^e(O_k,\Phi(k))\pi_k, \\ k = 0,1,\cdots,T-1\end{array}\right.$$

其中 $E_{0,x,s}[\cdot] = E[\cdot \mid X_0^\pi = x,O_0 = s,\Phi^s(0)]$。

3 模型求解

优化问题 $\widehat{P}(mv)$ 中，由于约束条件 $E_{0,x,s}[X_{T\wedge\tau}^\pi] = d$ 等价于 $E_{0,x,s}[X_{T\wedge\tau}^\pi - d] = 0$，可采

用拉格朗日乘子法处理约束条件 $E_{0,x,s}[X^{\pi}_{T\wedge\tau}] = d$ 。引入拉格朗日乘子 2λ ，先求解以下优化问题

$$LP(mv)\begin{cases}\min\limits_{\pi\in\Xi}E_{0,x,s}[(X^{\pi}_{T\wedge\tau}-d)^2]+2\lambda E_{0,x,s}[X^{\pi}_{T\wedge\tau}-d],\\ \text{s. t. } X^{\pi}_{k+1}=R^0_k(O_k)X^{\pi}_k+R^e_k(O_k,\Phi(k))\boldsymbol{\pi}_k,\\ \quad k=0,1,\cdots,T-1\end{cases}$$

令 $L(x,O_0,\Phi(0),\lambda)$ 表示问题 $LP(mv)$ 的最优值函数，$\boldsymbol{\pi}^*_k = g(X^{\pi}_k,O_k,\Phi(k),\lambda)$ 表示对应的最优策略。设 λ^* 是函数 $L(x,O_0,\Phi(0),\lambda)$ 对应的最大值点，根据拉格朗日对偶原理，$L(x,O_0,\Phi(0),\lambda^*)$ 是问题 $\hat{P}(mv)$ 的最优值函数，$\boldsymbol{\pi}^*_k = g(X^{\pi}_k,O_k,\Phi(k),\lambda^*)$ 是问题 $\hat{P}(mv)$ 对应的最优策略。注意到

$$E_{0,x,s}[(X^{\pi}_{T\wedge\tau}-d)^2]+2\lambda E_{0,x,s}[X^{\pi}_{T\wedge\tau}-d] = E_{0,x,s}[(X^{\pi}_{T\wedge\tau})^2+2\gamma X^{\pi}_{T\wedge\tau}-d^2-2\gamma d] \tag{4}$$

其中 $\gamma=\lambda-d$ 。由于 λ 和 d 都是常数，所以优化问题 $LP(mv)$ 等价于

$$\begin{cases}\min\limits_{\pi\in\Xi}E_{0,x,s}[(X^{\pi}_{T\wedge\tau})^2+2\gamma X^{\pi}_{T\wedge\tau}],\\ \text{s. t. } X^{\pi}_{k+1}=R^0_k(O_k)X^{\pi}_k+R^e_k(O_k,\Phi(k))\boldsymbol{\pi}_k,\\ \quad k=0,1,\cdots,T-1\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}&E_{0,x,s}[(X^{\pi}_{T\wedge\tau})^2+2\gamma X^{\pi}_{T\wedge\tau}] = \\ &E_{0,x,s}[E[(X^{\pi}_{T\wedge\tau})^2+2\gamma X^{\pi}_{T\wedge\tau}\mid\mathfrak{I}_T]] = \\ &E_{0,x,s}[\sum_{k=0}^{T}\Pr\{\tau=k\mid\mathfrak{I}_T\}E[(X^{\pi}_k)^2+2\gamma X^{\pi}_k\mid\mathfrak{I}_T]] = \\ &E_{0,x,s}[\sum_{k=0}^{T}\Pr\{\tau=k\mid O_k\}E[(X^{\pi}_k)^2+2\gamma X^{\pi}_k\mid\mathfrak{I}_T]] = \\ &E_{0,x,s}[\sum_{k=0}^{T}p_k(O_k)((X^{\pi}_k)^2+2\gamma X^{\pi}_k)]\end{aligned} \tag{5}$$

所以问题 $LP(mv)$ 等价于

$$\widehat{LP}(mv)\begin{cases}\min\limits_{\pi\in\Xi}E_{0,x,s}[\sum_{k=0}^{T}p_k(O_k)((X^{\pi}_k)^2+2\gamma X^{\pi}_k)],\text{s. t.}\\ X^{\pi}_{k+1}=R^0_k(O_k)X^{\pi}_k+R^e_k(O_k,\Phi(k))\boldsymbol{\pi}_k,\\ \quad k=0,1,\cdots,T-1\end{cases}$$

令

$$J^*_k(x_k,s,\Phi^s(k)) = \min_{\pi_k,\cdots,\pi_{T-1}}E_{k,x_k,s}[\sum_{n=k}^{T}p_n(O_n)(X^2_n+2\gamma X_n)]$$

表示从第 $k+1$ 阶段初财富 x_k 、状态 $O_k=s$ 和 $\Phi^s(k)$ 出发的优化问题 $\widehat{LP}(mv)$ 的最优值函数，其中 $E_{k,x_k,s}[\cdot]=E[\cdot\mid X^{\pi}_k=x_k,O_k=s,\Phi^s(k)]$。当 $k=0$ 时，$J^*_0(x,s,\Phi^s(0))$ 即为优化问题 $\widehat{LP}(mv)$ 的最优值。根据动态规划原理，优化问题 $\widehat{LP}(mv)$ 的 Bellman 方程为

$$\begin{aligned}J^*_k(x_k,s,\Phi^s(k)) &= \min_{\pi_k}p_k(s)(x^2_k+2\gamma x_k)+E_{k,x_k,s}[J^*_{k+1}(X^{\pi}_{k+1},O_{k+1},\Phi(k+1))] = \\ &p_k(s)(x^2_k+2\gamma x_k)+\min_{\pi_k}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\cdot\\ &E[J^*_{k+1}(R^0_k(s)x_k+R^e_k(s,i)\boldsymbol{\pi}_k,j,\Phi^j(k+1))]\end{aligned} \tag{6}$$

以及边界条件 $J^*_T(x_T,s,\Phi^s(T)) = p_T(s)(x^2_T+2\gamma x_T)$ 。

命题 1　对任意的 $i=1,2,\cdots,N$ ，如果 ξ_i 是非退化的随机变量，a_i 是非负常数且满足 $\sum_{i=1}^{N}a^2_i\neq 0$ ，则有 $(\sum_{i=1}^{N}a_i)(\sum_{i=1}^{N}a_iE(\xi^2_i)) > (\sum_{i=1}^{N}a_iE(\xi_i))^2$。

利用动态规划方法，求得优化问题 $\widehat{LP}(mv)$ 的最优策略和最优值函数如下。

定理 1　对任意 $k=0,1,\cdots,T$ 和 $s\in\hat{\Pi}$，问题 $\widehat{LP}(mv)$ 的最优值函数为

$$J^*_k(x_k,s,\Phi^s(k)) = \alpha_k(s)x^2_k + 2\gamma\beta_k(s)x_k-\gamma^2C_k(s) \tag{7}$$

相应最优策略为

$$\boldsymbol{\pi}^*_k = -(\gamma\frac{\zeta^2_k(s)}{\boldsymbol{v}_k(s)}+\frac{\zeta^1_k(s)}{\boldsymbol{v}_k(s)}R^0_k(s)x_k) \tag{8}$$

其中 x_k 是在策略 $\boldsymbol{\pi}^*$ 下时刻 k 的财富值，且

$$\zeta^1_k(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\cdot\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R^e_k(s,i)] \tag{9}$$

$$\zeta^2_k(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\cdot\theta_k(i,j)\beta_{k+1}(j)E[R^e_k(s,i)] \tag{10}$$

$$\boldsymbol{v}_k(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\cdot\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R^e_k(s,i)]^2 \tag{11}$$

$$\alpha_k(s) = p_k(s)+(R^0_k(s))^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)-\frac{(\zeta^1_k(s))^2}{\boldsymbol{v}_k(s)}\right],\quad \alpha_T(s)=1 \tag{12}$$

$$\beta_k(s) = p_k(s)+R^0_k(s)\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\beta_{k+1}(j)-\frac{\zeta^1_k(s)\zeta^2_k(s)}{\boldsymbol{v}_k(s)}\right],\quad \beta_T(s)=1 \tag{13}$$

$$C_k(s) = \frac{(\zeta^2_k(s))^2}{\boldsymbol{v}_k(s)}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\cdot C_{k+1}(j),\quad C_T(s)=0 \tag{14}$$

证明 下面利用数学归纳法证明。根据边界条件 $J_T^*(x_T,s,\Phi^s(T)) = p_T(s)(x_T^2+2\gamma x_T)$ 和 Bellman 方程（6），有

$$J_{T-1}^*(x_{T-1},s,\Phi^s(T-1)) = p_{T-1}(s)(x_{T-1}^2+2\gamma x_{T-1})+\min_{\pi_{T-1}}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(T-1,i)\theta_{T-1}(i,j)p_T(j)E[(X_T^\pi)^2+2\gamma X_T^\pi] =$$

$$p_{T-1}(s)(x_{T-1}^2+2\gamma x_{T-1})+\min_{\pi_{T-1}}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(T-1,i)\cdot \theta_{T-1}(i,j)p_T(j)\ [(R_{T-1}^0(s)x_{T-1})^2+ 2E[R_{T-1}^e(s,i)]R_{T-1}^0(s)x_{T-1}\pi_{T-1}+E[R_{T-1}^e(s,i)]^2\pi_{T-1}^2+ 2\gamma(R_{T-1}^0(s)x_{T-1}+E[R_{T-1}^e(s,i)]\pi_{T-1})]$$

由于风险资产是非退化的，所以 $E[R_{T-1}^e(s,i)]^2 = \mathrm{Var}[R_{T-1}^e(s,i)] + (E[R_{T-1}^e(s,i)])^2 > 0$。从而 $\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(T-1,i)\theta_{T-1}(i,j)p_T(j)E[R_{T-1}^e(s,i)]^2 > 0$。根据一阶最优性条件，最优解为

$$\pi_{T-1}^* = -(\gamma\frac{\zeta_{T-1}^2(s)}{\upsilon_{T-1}(s)}+\frac{\zeta_{T-1}^1(s)}{\upsilon_{T-1}(s)}R_{T-1}^0(s)x_{T-1})$$

其中

$$\zeta_{T-1}^1(s) = \zeta_{T-1}^2(s) = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(T-1,i)\cdot \theta_{T-1}(i,j)p_T(j)E[R_{T-1}^e(s,i)],$$

$$\upsilon_{T-1}(s) = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(T-1,i)\theta_{T-1}(i,j)\cdot p_T(j)E[R_{T-1}^e(s,i)]^2$$

将 π_{T-1}^* 代入 $J_{T-1}^*(x_{T-1},s,\Phi^s(T-1))$ 得到

$$J_{T-1}^*(x_{T-1},s,\Phi^s(T-1)) = \alpha_{T-1}(s)x_{T-1}^2+ 2\gamma\beta_{T-1}(s)x_{T-1}-\gamma^2C_{T-1}(s)$$

其中

$$\alpha_{T-1}(s) = p_{T-1}(s)+(R_{T-1}^0(s))^2\cdot \Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(T-1,i)\theta_{T-1}(i,j)p_T(j)-\frac{(\zeta_{T-1}^1(s))^2}{\upsilon_{T-1}(s)}\Big],$$

$$\beta_{T-1}(s) = p_{T-1}(s)+R_{T-1}^0(s)\cdot \Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(T-1,i)\theta_{T-1}(i,j)p_T(j)-\frac{\zeta_{T-1}^1(s)\zeta_{T-1}^2(s)}{\upsilon_{T-1}(s)}\Big],$$

$$C_{T-1}(s) = \frac{(\zeta_{T-1}^2(s))^2}{\upsilon_{T-1}(s)}$$

假定对于 $k+1$，式（7）也是成立的，即

$$J_{k+1}^*(x_{k+1},s,\Phi^s(k+1)) = \alpha_{k+1}(s)x_{k+1}^2+ 2\gamma\beta_{k+1}(s)x_{k+1}-\gamma^2C_{k+1}(s)$$

根据 Bellman 方程（6）有

$$J_k^*(x_k,s,\Phi^s(k)) = p_k(s)(x_k^2+2\gamma x_k)+ \min_{\pi_k}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\cdot E\ [\alpha_{k+1}(j)(R_k^0(s)x_k+R_k^e(s,i)\pi_k)^2+ 2\gamma\beta_{k+1}(j)(R_k^0(s)x_k+R_k^e(s,i)\pi_k)-\gamma^2C_{k+1}(j)]$$

由于风险资产为非退化的，所以 $\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R_k^e(s,i)]^2>0$。根据一阶最优性条件可得最优策略为

$$\pi_k^* = -(\gamma\frac{\zeta_k^2(s)}{\upsilon_k(s)}+\frac{\zeta_k^1(s)}{\upsilon_k(s)}R_k^0(s)x_k)$$

其中

$$\zeta_k^1(s) = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R_k^e(s,i)],$$

$$\zeta_k^2(s) = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\beta_{k+1}(j)E[R_k^e(s,i)],$$

$$\upsilon_k(s) = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R_k^e(s,i)]^2$$

将 π_k^* 代入 $J_k^*(x_k,s,\Phi^s(k))$ 并化简得到

$$J_k^*(x_k,s,\Phi^s(k)) = \alpha_k(s)x_k^2+2\gamma\beta_k(s)x_k-\gamma^2C_k(s)$$

其中

$$\alpha_k(s) = p_k(s)+(R_k^0(s))^2\cdot \Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)-\frac{(\zeta_k^1(s))^2}{\upsilon_k(s)}\Big],$$

$$\beta_k(s) = p_k(s)+R_k^0(s)\cdot \Big[\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\beta_{k+1}(j)-\frac{\zeta_k^1(s)\zeta_k^2(s)}{\upsilon_k(s)}\Big],$$

$$C_k(s) = \frac{(\zeta_k^2(s))^2}{\upsilon_k(s)}+\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)C_{k+1}(j)$$

综上，根据数学归纳法，对任意的 $k = 0,1,\cdots,T$ 和 $s\in\hat{\Pi}$，式（7）和式（8）都是成立的。证毕。

4 最优策略和有效前沿

根据定理 1 可得，$J_0^*(x,s,\Phi^s(0)) = \alpha_0(s)x^2+2\gamma\beta_0(s)x-\gamma^2C_0(s)$ 且 $\gamma = \lambda-d$，所以优化问题 $LP(mv)$ 的最优值函数为

$$L(x,s,\Phi^s(0),\lambda) = \alpha_0(s)x^2+2(\lambda-d)\cdot \beta_0(s)x-(\lambda-d)^2C_0(s)- d^2-2d(\lambda-d) \tag{15}$$

根据拉格朗日对偶原理，优化问题 $\hat{P}(mv)$ 的最小值函数即最小方差 $\mathrm{Var}_{0,x,s}[X_{T\wedge\tau}^\pi] = E_{0,x,s}[(X_{T\wedge\tau}^\pi-d)^2]$ 是优化问题 $LP(mv)$ 的最优值函数 $L(x,s,\Phi^s(0),\lambda)$ 关于 λ 的最大值，即

$$\mathrm{Var}_{0,x,s}[X_{T\wedge\tau}^\pi] = \max_\lambda L(x,s,\Phi^s(0),\lambda) = \max_\lambda\{-\lambda^2C_0(s)+2\lambda[\beta_0(s)x+d(C_0(s)-1)]+ \alpha_0(s)x^2-2x\beta_0(s)d+(1-C_0(s))d^2\} \tag{16}$$

根据 $C_0(s)$ 的表达式，不难发现 $C_0(s)>0$，故优化问题（16）的最大值存在。根据一阶最优性条

件，使问题（16）达到最优的 λ 为

$$\lambda^{*}=\frac{\beta_0(s)x-d}{C_0(s)}+d \tag{17}$$

从而 $\gamma^{*}=\lambda^{*}-d=\frac{\beta_0(s)x-d}{C_0(s)}$。将 γ^{*} 代入式（8）可得，在时刻 k 观测状态为 O_k 时，优化问题 $\widehat{P}(mv)$ 的最优策略为

$$\pi_k^{*}=-\left(\frac{\beta_0(s)x-d}{C_0(s)}\cdot\frac{\zeta_k^2(O_k)}{\upsilon_k(O_k)}+\frac{\zeta_k^1(O_k)}{\upsilon_k(O_k)}R_k^0(O_k)x_k\right) \tag{18}$$

将 λ^{*} 代入式（16）可得优化问题 $\widehat{P}(mv)$ 的最优值函数即最小方差为

$$\mathrm{Var}_{0,x,s}[X_{T\wedge\tau}^{\pi}]=E_{0,x,s}[(X_{T\wedge\tau}^{\pi}-d)^2]=$$

$$\frac{1-C_0(s)}{C_0(s)}(d-\frac{\beta_0(s)}{1-C_0(s)}x)^2+(\alpha_0(s)-\frac{\beta_0^2(s)}{1-C_0(s)})x^2 \tag{19}$$

根据文［34］，信息部分可观测下的优化问题 $P(mv)$ 等价于信息完全可观测的优化问题 $\widehat{P}(mv)$，所以优化问题 $P(mv)$ 的最优投资策略和最优值函数可由下面的定理给出。

定理 2　在期望终端财富 $E[X_{T\wedge\tau}^{\pi}\mid X_0^{\pi}=x,O_0=s]=d$ 的约束下，信息部分可观测市场中退出时间不确定下投资组合选择问题 $P(mv)$ 的最优投资策略为

$$\pi_k^{mv}=-\left(\frac{\beta_0(s)x-d}{C_0(s)}\cdot\frac{\zeta_k^2(O_k)}{\upsilon_k(O_k)}+\frac{\zeta_k^1(O_k)}{\upsilon_k(O_k)}R_k^0(O_k)x_k\right),\quad k=0,1,\cdots,T-1 \tag{20}$$

进一步，可得到相应的有效边界为

$$\mathrm{Var}_{0,x,s}^{mv}[X_{T\wedge\tau}^{\pi^{mv}}]=\frac{1-C_0(s)}{C_0(s)}\left(E_{0,x,s}^{mv}[X_{T\wedge\tau}^{\pi^{mv}}]-\frac{\beta_0(s)}{1-C_0(s)}x\right)^2+\left(\alpha_0(s)-\frac{\beta_0^2(s)}{1-C_0(s)}\right)x^2 \tag{21}$$

其中 $X_{T\wedge\tau}^{\pi^{mv}}$ 表示应用最优策略 π^{mv} 时在时刻 $T\wedge\tau$ 退出市场时的终端财富，$E_{0,x,s}^{mv}[X_{T\wedge\tau}^{\pi^{mv}}]\in[\frac{\beta_0(s)}{1-C_0(s)}x,\infty)$。

根据式（20），信息部分可观测时不确定退出时间下投资组合选择问题 $P(mv)$ 的最优投资决策 π_k^{mv} 不仅依赖于每个阶段开始时观测到的市场状态 O_k，还依赖于投资者对不可观测市场状态的判断 $\Phi(k)$。另外，不可观测状态 U_k 通过其条件概率分布 $\Phi(k)$ 影响参数 $\zeta_k^1(O_k),\zeta_k^2(O_k)$ 和 $\upsilon_k(O_k)$，并进而影响最优投资策略 π_k^{mv}。投资者实际退出时间 $T\wedge\tau$ 的概率分布不同时，最优资产组合策略也是不同的。这与我们在金融市场中的投资实践是相符的。另一方面，由于风险资产是非退化的，风险资产不会退化为无风险资产；市场上存在不可观测的市场状态，且投资者退出市场的时间依赖于观测到的市场状态，是不确定的，投资风险难以被完全对冲，所以，$\mathrm{Var}_{0,x,s}^{mv}[X_{T\wedge\tau}^{\pi^{mv}}]>0$。因此 $0<C_0(s)<1$。特别的，当 $d=\frac{\beta_0(s)}{1-C_0(s)}x$ 时，全局最小方差为 $(\alpha_0(s)-\frac{\beta_0^2(s)}{1-C_0(s)})x^2$。

5　特　例

1）当投资者退出市场的时间是确定的，也就是说投资者在时刻 T 退出市场，即 $p_0(O_0)=p_1(O_1)=\cdots=p_{T-1}(O_{T-1})=0$，$p_T(O_T)=1$。此时，问题 $P(mv)$ 的最优策略和有效边界仍由式（20）－（21）给出，但相应的参数退化为

$$\zeta_k^1(s)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R_k^e(s,i)],$$

$$\zeta_k^2(s)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\beta_{k+1}(j)E[R_k^e(s,i)],$$

$$\upsilon_k(s)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R_k^e(s,i)]^2,$$

$$\alpha_k(s)=(R_k^0(s))^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)-\frac{(\zeta_k^1(s))^2}{\upsilon_k(s)}\right],$$

$$\alpha_T(s)=1;$$

$$\beta_k(s)=R_k^0(s)\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)\beta_{k+1}(j)-\frac{\zeta_k^1(s)\zeta_k^2(s)}{\upsilon_k(s)}\right],$$

$$\beta_T(s)=1;$$

$$C_k(s)=\frac{(\zeta_k^2(s))^2}{\upsilon_k(s)}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Phi^s(k,i)\theta_k(i,j)C_{k+1}(j),$$

$$C_T(s)=0$$

2）当市场状态是完全可观测时，隐 Markov 链 U 变为 Markov 链，且对任意的 $k=0,1,\cdots,T-1$，有 $U_k=O_k,N=M$。当 $s=i$ 时，$\Pr\{O_k=s\mid U_k=i\}=1$；当 $s\neq i$ 时，$\Pr\{O_k=s\mid U_k=i\}=0$。这意味着 $G_k=I_N$，其中 I_N 表示 $N\times N$ 阶的单位矩阵。从而式（2）退化为当 $s=i$ 时，$\Phi(k+1,i)=1$；当 $s\neq i$ 时，$\Phi(k+1,i)=0$。相应的 $\theta_k(i,j)=\sum_{l=1}^{N}Q_k(i,l)g_{k+1}(l,j)=Q_k(i,j)$，$E[R_k^e(s,i)]=E[R_k^e(i)]$，相应的参数退化为

$$\zeta_k^1(i) = \sum_{j=1}^{N} Q_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R_k^e(i)],$$

$$\zeta_k^2(i) = \sum_{j=1}^{N} Q_k(i,j)\beta_{k+1}(j)E[R_k^e(i)],$$

$$\upsilon_k(i) = \sum_{j=1}^{N} Q_k(i,j)\alpha_{k+1}(j)E[R_k^e(i)]^2,$$

$$\alpha_k(i) = p_k(i) + (R_k^0(s))^2 \left[\sum_{j=1}^{N} Q_k(i,j)\alpha_{k+1}(j) - \frac{(\zeta_k^1(i))^2}{\upsilon_k(i)}\right],$$

$$\beta_k(i) = p_k(i) + R_k^0(s) \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} Q_k(i,j)\beta_{k+1}(j) - \frac{\zeta_k^1(i)\zeta_k^2(i)}{\upsilon_k(i)}\right],$$

$$C_k(i) = \frac{(\zeta_k^2(i))^2}{\upsilon_k(i)} + \sum_{j=1}^{N} Q_k(i,j)C_{k+1}(j)$$

那么，从时刻 0 初始状态 i 出发到时刻 k 状态为 j 时，信息部分可观测市场中退出时间不确定下投资组合选择问题的最优投资策略为

$$\pi_k^{mv} = -\left(\frac{\beta_0(i)x - d}{C_0(i)} \cdot \frac{\zeta_k^2(j)}{\upsilon_k(j)} + \frac{\zeta_k^1(j)}{\upsilon_k(j)}R_k^0(j)x_k\right),\quad k = 0,1,\cdots,T-1 \tag{22}$$

相应的有效边界为

$$\mathrm{Var}_{0,x,i}^{mv}[X_{T\wedge\tau}^{\pi^{mv}}] = \frac{1 - C_0(i)}{C_0(i)}\left(E_{0,x,i}^{mv}[X_{T\wedge\tau}^{\pi^{mv}}] - \frac{\beta_0(i)}{1 - C_0(i)}x\right)^2 + \left(\alpha_0(i) - \frac{\beta_0^2(i)}{1 - C_0(i)}\right)x^2 \tag{23}$$

特别的，当投资者退出市场的概率分布与状态无关时，即 $p_k(i) = p_k$ 时，式（22）和式（23）同文［14］中只有一个风险资产情况下的结论一致。

6 结 论

本文研究了同时具有可观测状态和不可观测状态的金融市场中，不确定退出时间下的多阶段均值－方差最优投资组合选择问题。我们利用有限状态离散时间隐 Markov 链刻画不可观测市场状态的演变过程，且状态转移概率是时间的确定性函数。假定风险资产的收益同时依赖于可观测市场状态和不可观测市场状态，无风险资产收益依赖于可观测的市场状态。在投资过程中，随着获得信息的增加，当投资者根据当时观测信息判断发现投资活动不宜继续进行时，会结束投资活动退出市场。因此我们假定投资者退出市场的时间依赖于可观测的市场状态。我们通过应用充分统计量方法，信息部分可观测的投资组合优化问题等价地转化为信息完全可观测的优化问题，再结合动态规划方法和拉格朗日对偶原理，得到了信息部分可观测市场中均值－方差投资组合问题的最优策略和有效边界的解析表达式。我们还发现可观测和不可观测的市场状态以及随机退出时间都对都对最优策略均有显著的影响，且不可观测的市场状态是通过投资者对其概率分布的推断影响最优资产组合策略。

参考文献：

［1］ MARKOWITZ H. Portfolio selection［J］. Journal of Finance, 1952, 7: 7－91.

［2］ MERTON R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case［J］. The Review of Economics and Statistics, 1969, 51(3): 247－257.

［3］ LI D, NG W L. Optimal dynamic portfolio selection: multi-period mean-variance formulation［J］. Mathematical Finance, 2000, 10: 387－406.

［4］ ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework［J］. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42: 19－33.

［5］ LIM A E B, ZHOU X Y. Mean-variance portfolio with random parameters in a complete market［J］. Mathematics of Operational Research, 2002, 27: 101－120.

［6］ ZHU S S, LI D, WANG S Y. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: a generalize mean-variance formulation［J］. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49:447－457.

［7］ LEIPPOLD M, TROJANI F, VANINI P. A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities［J］. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, 8:1079－1113.

［8］ BASAK S, CHABAKAURI G. Dynamic mean-variance asset allocation［J］. Review of Financial Studies, 2010, 23: 2970－3016.

［9］ BJÖRK T, MURGOCI A, ZHOU X Y. Mean-variance portfolios optimization with state-dependent risk aversion［J］. Mathematical Finance, 2014, 24(1): 1－24.

［10］ HAMILTON J D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle［J］. Econometrica, 1989, 57: 357－384.

［11］ ZHOU X Y, YIN G. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: A continuous-time model［J］. SIAM Journal on Control and Optimization, 2003, 42: 1466－1482.

［12］ ÇAKMAK U, ÖZEKICI S. Portfolio optimization in a stochastic market［J］. Mathematical Methods of Operations Research, 2006, 63(1): 151－168.

［13］ COSTA O L V, ARAUJO M V. A generalized multi-period mean-variance portfolio optimization with Makov switching parameters [J]. Automatica, 2008, 44: 2487 –2497.

[14] WU H L, LI Z F. Multi-period mean-variance portfolio selection with Markov regime switching and uncertain time horizon [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2011, 24: 140 – 155.

[15] HONDA T. Optimal portfolio choice for unobservable and regime-switching mean returns [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2003, 28(1): 45 – 78.

[16] BÄUERLE N, RIEDER U. Portfolio optimization with unobservable Markov-modulated drift process [J]. Journal of Applied Probability, 2005, 42(2): 362 – 378.

[17] HAUSSMANN U G, SASS J. Optimizing the terminal wealth under partial information: the drift process as a continuous time Markov chain[J]. Finance and Stochastics, 2004, 8: 553 – 577.

[18] BENSOUSSAN A, KEPPO J, SETHI S P. Optimal consumption and portfolio decisions with partially observed true prices [J]. Mathematical Finance, 2009, 19(2): 215 – 236.

[19] ELLIOTT R J, SIU T K, BADESCU A. On mean-variance portfolio selection under a hidden Markovian regime-switching model [J]. Economic Modelling, 2010, 27: 678 – 686.

[20] ÇANAKOĜLU E, ÖZEKICI S. Portfolio selection with imperfect information: A hidden Markov model [J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2011, 27: 95 – 114.

[21] BAE G I, KIM W C, MULVEY J M. Dynamic asset allocation for varied financial markets under regime switching framework [J]. European Journal of Operational Research, 2014, 234: 450 – 458.

[22] YARRI M E. Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer [J]. The Review of Economic Studies, 1965, 32(2): 137 – 150.

[23] KARATZAS I, WANG H. Utility maximization with discretionary stopping [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2001, 39(1): 306 – 329.

[24] LIU H, LOEWENSTEIN M. Optimal portfolio selection with transaction costs and finite horizons [J]. Reviews of Financial Studies, 2002, 15: 805 – 835.

[25] 郭文旌，胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合 [J]. 管理科学学报, 2005, 8(2): 13 – 19.

[26] BLANCHET-SCALLIET C, EI KAROUI N, JEANBLANC M, et al. Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain [J]. Journal of Mathematical Economics, 2008, 44(11): 1100 – 1113.

[27] YI L, LI Z F, LI D. Multi-period portfolio selection for asset liability management with uncertain investment horizon [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2008, 4(3): 535 – 552.

[28] ZHANG L, LI Z F. Multi-period mean-variance portfolio selection with uncertain time horizon when returns are serially correlated [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, Article ID: 216891.

[29] ZENG Y, WU H L, LAI Y Z. Optimal investment and consumption strategies with state-dependent utility functions and uncertain time horizon [J]. Economic Modelling, 2013, 33: 462 – 470.

[30] WU H L, ZENG Y, YAO H X. Multi-period mean-variance portfolio selection with state-dependent exit probability [J]. Economic Modelling, 2014, 36: 69 – 78.

[31] WU H L, LI Z F. Multi-period mean-variance portfolio selection with Markov regime switching and uncertain time-horizon [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2011, 24: 140 – 155.

[32] YAO H X, LAI Y Z, HAO Z F. Uncertain exit time multi-period mean-variance portfolio selection with endogenous liabilities and Markov jumps [J]. Automatica, 2013, 49(11): 3258 – 3269.

[33] BERTSEKAS D P. Dynamic programming: Deterministic and Stochastic models [M]. Prentice-Hall, 1987.

[34] MONAHAN G E. A survey of partially observable Markov decision processes: theory, models, and algorithms [J]. Management Science, 1982, 28(1): 1 – 16.